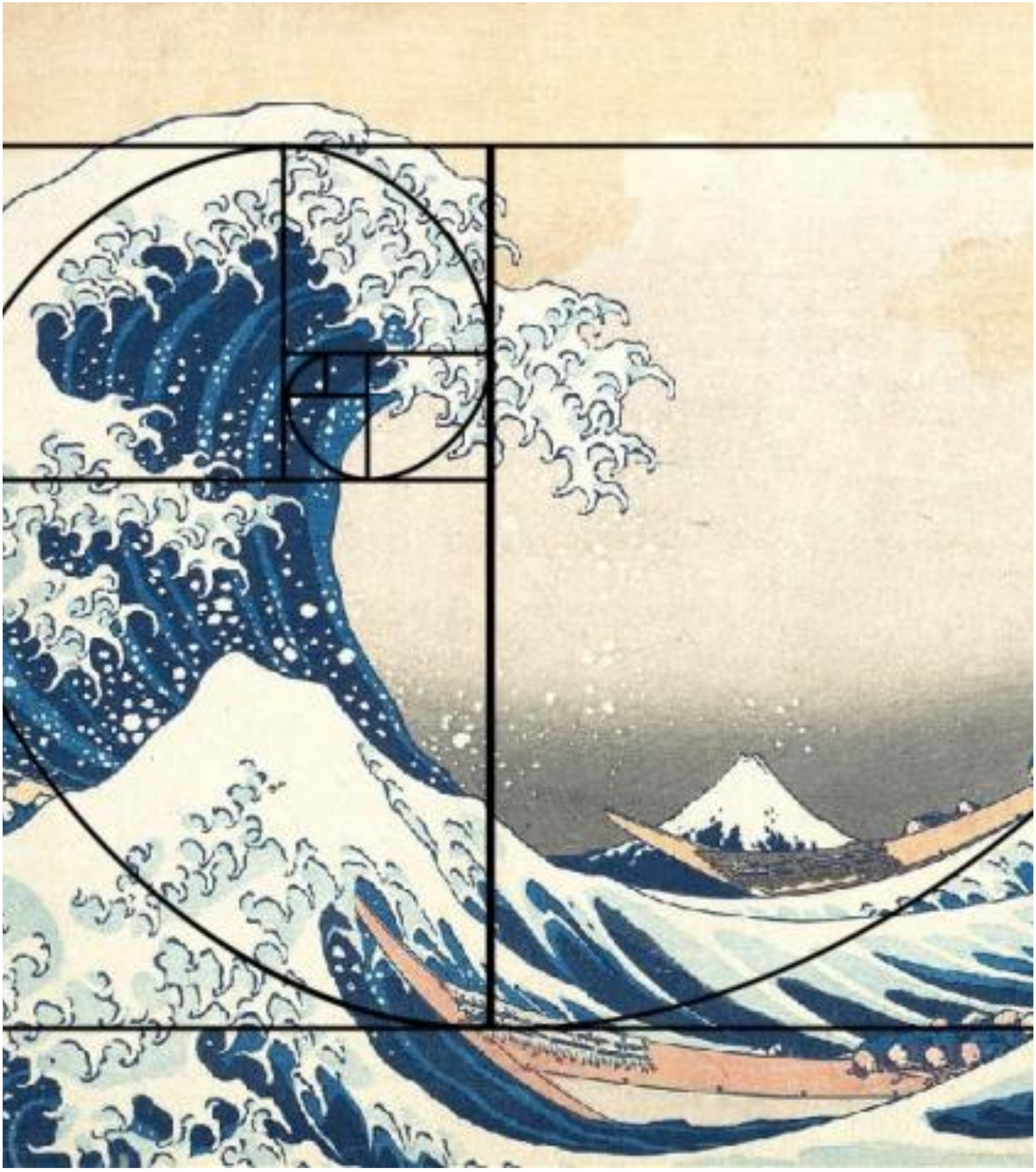
G8 Math

National Day Holiday Project



Class: _______________ Name: _______________

G8 Math National Day Holiday Project

回顾与引入

同学们，我们已经学习了根号和分数指数幂的概念。通过之前的探究，我们已经知道，根号其实是分数指数幂的一种特殊形式，比如$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$。这些抽象的数学概念构成了我们理解无理数和实数体系的基础，也为我们打开了通往更广阔世界的大门。本次个人作业将带领大家，用数学的眼光去探索它在不同领域的奇妙应用。

本次作业将以个人形式完成，最终以**海报或小论文**的形式呈现，**英语或者中文**皆可。请选择你感兴趣的一个领域，深入研究根号和分数指数幂在其中的具体应用，并给出清晰的图示、数据或案例。同时，请在作品中列出你所参考的文献或网络资料。接下来我将提供一些具体方向。

大方向：人文艺术

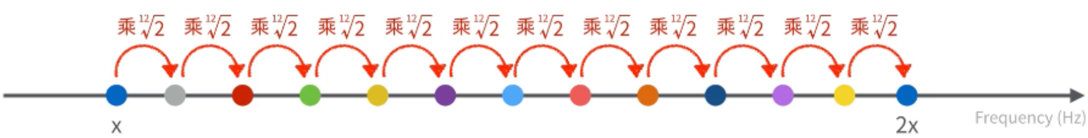
☐ 方向一：音乐中的数学律动

十二平均律：数学如何创造和谐？

在音乐领域，十二平均律利用了分数指数幂$2^{\frac{1}{12}}$，让每个半音之间的频率都保持固定的比例。这种看似简单的数学法则，却彻底改变了音乐史。

你可以在你的作业中深入介绍以下内容：

- **音阶和律制等音乐基本概念：**音阶是选哪些音形成旋律骨架，比如五声音阶、七声音阶等，调律则是确定每个音的实际频率
- **从古老的音律到数学革命：**介绍**五度相生律**和**纯律**等早期音律体系，并分析它们存在的缺陷，比如“狼音”问题。解释十二平均律是如何通过一个统一的数学公式，完美地解决了这些问题。
- **十二平均律的计算：**古人没有计算器，当时是如何计算出$2^{\frac{1}{12}}$的？



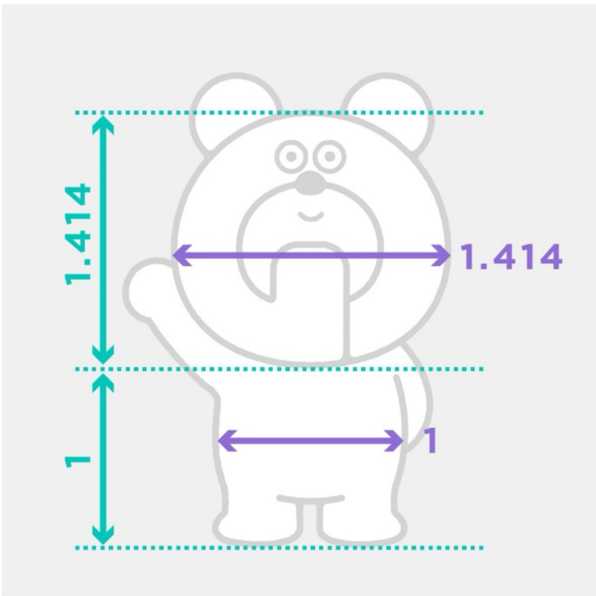
☐ 方向二：美术与设计中的数学比例

黄金比与白银比：数学如何定义美？

黄金比例（$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$）和白银比例（$\sqrt{2}:1$）是设计和艺术领域中两个重要的数学概念。它们的应用跨越了时间与文化，被认为是美感的来源。

你可以你的作业中深入介绍以下内容：

- **黄金比——美的永恒密码**：详细介绍黄金比的由来，并提供**斐波那契数列**与黄金比关系的数学证明。请列举具体的绘画、建筑（例如帕特农神庙）或自然界（例如向日葵）中的黄金比应用案例，并分析这些案例为什么给人以美感。
- **白银比——纸张上的和谐之美**：详细介绍白银比在**日本传统建筑**（例如法隆寺）**以及日本设计和漫画**中的应用。此外还可以用具体的数学推导过程，介绍 A 系列纸张的历史，如何通过$\sqrt{2}:1$这个比例，实现对折后仍保持相同长宽比的巧妙设计。
- **两种比例的区别，以及更多比例，如青铜比、金属比、超黄金比、塑料数等**



<u>大方向：理工科</u>

□ 方向三：纯数学的奥秘

无理数的世界：探索 e 和 π 的本质

在探讨根号的过程中，我们深入了无理数的世界。你可以去研究一些重要的无理数，例如 π 和 e，以及更多。它们看似抽象，却构成了宇宙和自然界最基本的规律。

你可以在你的作业中深入介绍以下内容：

- **e 和 π 的无理数证明**：选择一个你感兴趣的无理数（例如 e 或 π），研究并阐述其无理性的证明过程。这个证明可能涉及反证法、连分数或无穷级数，通过探索这个过程，你会更深刻地理解无理数这个概念。
- **无理数在现实中的应用**：举例说明 π 在几何学、物理学和工程学中的应用（例如圆周、摆动、信号处理等），并解释为什么 e 被称为“自然”对数的底，它在生物学、金融学和物理学中的复利增长和衰变现象中扮演了什么角色。

Prove that $e \notin \mathbb{Q}$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

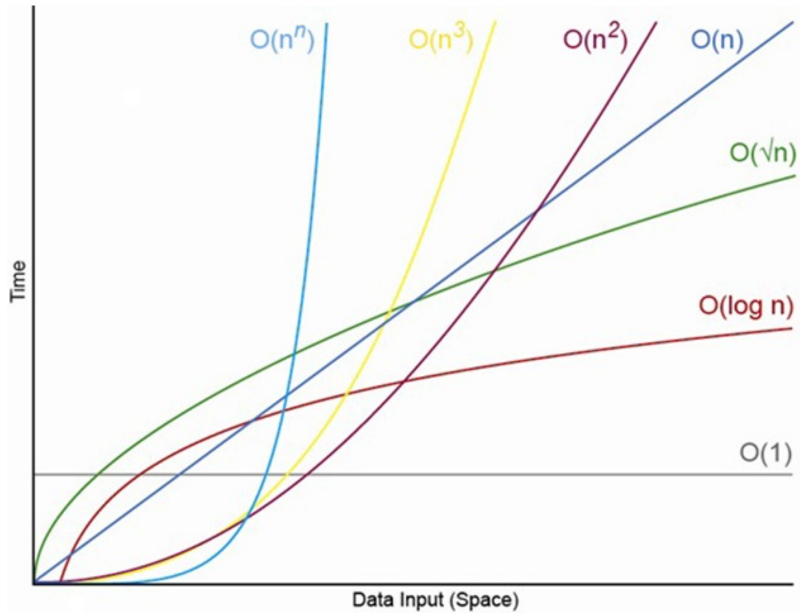
□方向四：计算机科学中的效率法则

时间复杂度：算法的生命周期

在计算机科学中，算法的效率至关重要，而时间复杂度就是衡量效率的标尺。我们用$O(n^2)$或$O(\sqrt{n})$这样的符号来描述算法的运行时间。这些看似简单的数学表达式背后，隐藏着算法性能的奥秘。

你可以在你的作业中深入介绍以下内容：

- **理解时间复杂度**：解释什么是时间复杂度，并以具体的代码示例，演示如何分析一个算法的运行时间。例如，一个简单的嵌套循环为什么是 $O(n^2)$，一个二分查找为什么是 $O(logn)$。
- **分数指数幂在算法中的应用**：研究并举例说明，为什么某些算法的时间复杂度会是分数指数幂，例如$O(n^{\frac{3}{2}})$。这类算法通常出现在需要对数据进行分治或特殊优化的复杂问题中，例如一些图像处理算法或图论问题。你的任务是找到一个具体的案例，并解释其背后的数学原理。



□ 方向五：物理学中的分数幂法则

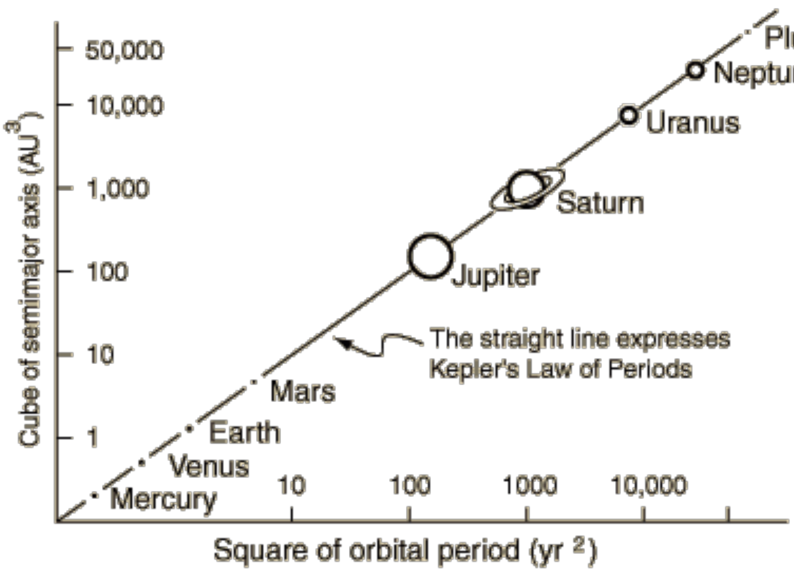
自然界的非线性关系

在物理学中，许多现象的规律并非简单的整数次幂，而是用分数指数幂来描述。这些分数次幂的法则揭示了自然界复杂而精妙的非线性关系。

你可以在你的作业中深入介绍以下内容：

- **行星运动的开普勒第三定律**：行星绕太阳公转的周期 T 与其轨道半长轴 a的关系是$T^2 \propto a^3$ 。这可以改写为$T \propto a^{\frac{3}{2}}$。请详细解释这条定律的物理意义，并说明它如何通过分数指数幂的形式，精确地描述了行星的运行规律。

- **理想气体中的绝热过程**：在没有热量交换的理想气体绝热过程中，压强 P 与体积 V 的关系遵循 $PV^{\gamma} = Constant$，其中绝热指数 γ 是一个分数。请解释这个公式的物理背景，并举例说明不同气体（如单原子气体和双原子气体）的 γ 值为什么是不同的，以及这反映了什么物理特性。



大方向：社会科学

□ 方向六：社会科学中的幂律分布

幂律法则：社会与网络的非均匀性

与物理世界一样，分数指数幂在社会科学中也有着重要的应用。许多社会现象，如财富分配、城市规模、网络连接，都遵循一种被称为**幂律分布**的规律，其核心就是分数指数幂。

你可以在你的作业中深入介绍以下内容：

- **帕累托法则（二八定律）**：帕累托法则指出，大约 80%的财富掌握在 20%的人手中。这个法则可以用幂律分布来描述，其指数通常是一个分数。请解释帕累托法则的数学形式，并分析它在经济学、管理学或社会学中的应用案例。
- **规模法则**：许多生物学和社会学现象都存在**规模法则**（Scaling Law）。例如，城市人口 P 与城市基础设施（如道路长度 L）的关系通常是 $L \propto P^{\alpha}$，其中指数 α 是一个分数。请研究并说明这种分数次幂关系如何反映了城市、生物体或社交网络的效率和结构特性。

Idea 1 绘画与黄金分割

西方绘画中的构图

构图是指美术创作者为了表现作品的主题思想和美感效果，在一定的空间内，安排和处理表现对象的关系和位置，把个别或局部的形象组成艺术的整体. 在绘画中，构图是绘画的起步，也是整个绘画形式中最不可或缺的重要组成部分.

黄金分割是由古希腊的数学家发现的一种古老的数学方法. 把一条线段分割为两部分，使较大部分的长与全长的比等于较小部分的长与较大部分的长的比，这样的分割叫做黄金分割，分割点叫做黄金分割点，比叫做黄金分割比，其值是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，近似为 0.618. 在绘画艺术中，黄金分割应用广泛，通过黄金分割进行构图可以使画面中各个部分具有和谐的比例关系，极具美学价值.

画家们运用黄金分割进行构图的方法，叫做黄金分割构图法. 黄金分割构图法是画家在进行创作时经常使用的构图方法. 不过绘画艺术并不是精准的数学计算，画家并不会精准地找出黄金分割点后构图，而是通过眼睛的观察，得出 5∶8，3∶5，2∶3 等多种舒服协调的比，它们都可以看作黄金分割比.

如图 1.1-1，在西方绘画中画家一般用四条线将画面平均分割成等大的九个部分，分割画面的四条线近似看作黄金分割线，线段交汇所形成的点 A，B，C，D 即黄金分割点，这就是人们常常提起的九宫格构图法. 在创作中画家们通常会把画面主体安排在黄金分割点附近，这样不仅可以避免呆板的对称式构图，还可以使画面主体突出、主题明确，画面更具美感.

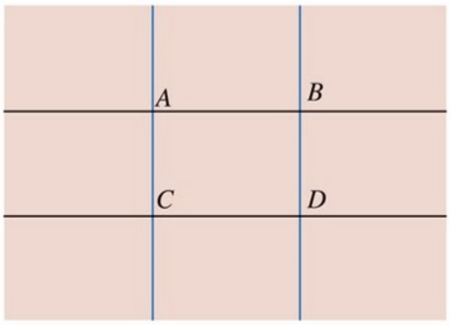


图 1.1-1

黄金分割构图法还包含一种特殊的构图方法：对角线构图法. 对角线构图是在九宫格构图的基础上形成的，如图 1.1-2，四条分割线交汇形成点 A，B，C，D，过对着的两点（如点 A，D）画线段，就形成了对角线构图. 对角线构图具有良好的视觉效果，运用对角线构图可以描绘出富有活力和动感的画面.

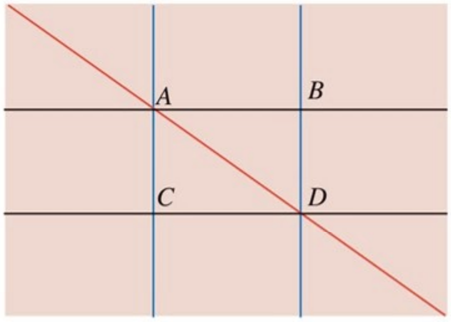


图 1.1-2

例 1　柯罗画作中的九宫格法构图

法国巴比松画派的代表人物柯罗，在其风景画创作中大量运用了九宫格构图法. 图 1.1-3 是柯罗晚期经过大量风景写生的积累，凭借自身的“回忆”“想象”而完成的一幅巨作，也是其最具代表性的风景油画作品，画作名称为《蒙特枫丹的回忆》. 画面中巧妙地运用了九宫格构图法，画家以分割线为基础，按照黄金分割比构建画面.

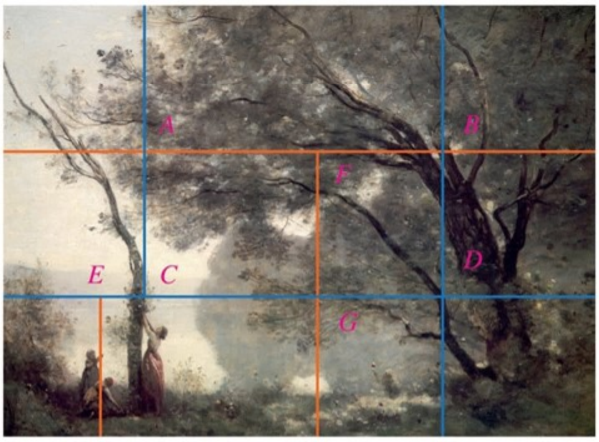


图 1.1-3

如图 1.1-3，我们可以观察到画家将占据画面三分之二的大树以及与之对称的画面左侧采蘑菇的少女和玩耍的孩童安排在黄金分割线 BD，AC 附近作为画面的主体. 处于 AC 附近独立枯槁的树干与画面右侧顺势向着同一方向倾倒的大树交相呼应. 这样的黄金分割构图，使画面布局更加均衡，避免了一边倒构图中出现的画面失衡感，两个主体交相呼应，再加上黄金分割点 C 附近人物的点缀，使观者的视线在两棵树间跳跃，这样的布局提高了观者的视觉平衡感.

探究

如图 1.1-4，请你从黄金分割构图的角度赏析柯罗的另一部作品《晨，水仙之舞》，其中 H 和 M 都是黄金分割点.

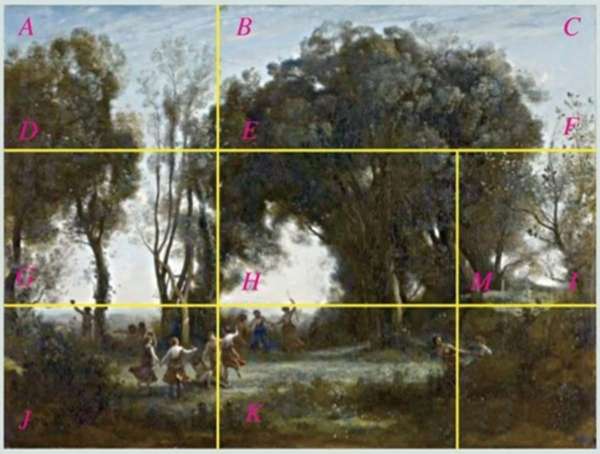


图 1.1-4

黄金分割在画面构图中占据着十分重要的地位. 在利用点、线所产生的画面轨迹分割画面时，合理运用黄金分割法则可以调节画面的比例，使画面的空间节奏更具张力，更加符合人们的视觉审美. 黄金分割点在全景构图中多是表现对象或是视觉中心所处的位置，在中、近景构图中多是景物主要部位所处的位置.

很多绘画中都能看到黄金分割的影子，如米勒的《拾穗者》(图 1.1-5)、波提切利的《维纳斯的诞生》等.

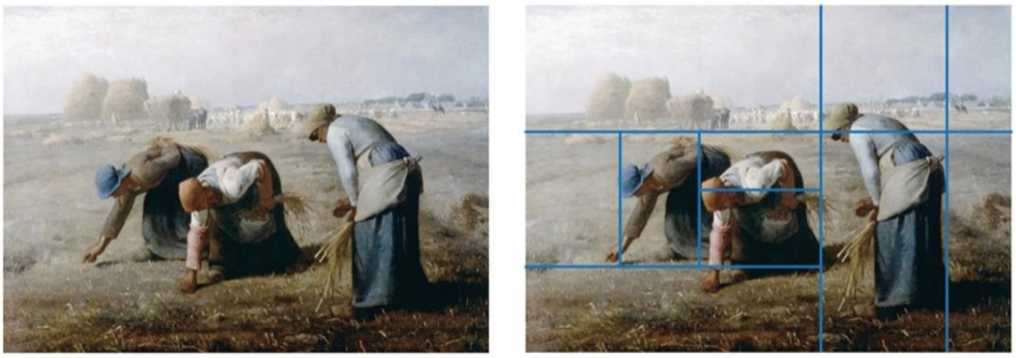


图 1.1-5

《拾穗者》的画面很美，金色的阳光斜照在三位劳动妇女身上，清新明亮，她们的瞬间姿态如雕像般高贵尊严. 《拾穗者》这幅画的四周轮廓线构成黄金矩形，即矩形的宽与长的比为黄金分割比；同时三位农妇头部的位置也符合黄金分割构图. 红头巾农妇的头部位于整幅画的黄金分割点附近，蓝头巾农妇的头部位于红头巾农妇的头部与画面左边边界的黄金分割点附近，而黄头巾农妇的头部位于红头巾农妇的头部与画面右边边界的黄

金分割点附近. 三位主人公的头部均处于画面的黄金分割点附近，使画面和谐均衡，体现了米勒精心巧妙的构图设计.

黄金分割浅窥

传说公元前六世纪古希腊的毕达哥拉斯发现了黄金分割的规则. 公元前 300 年左右欧几里得撰写的《原本》成为最早的有关黄金分割的论著. 到了文艺复兴时期，黄金分割由阿拉伯人传入欧洲，引起人们极大的兴趣和关注. 中世纪后，黄金分割被赋予了神秘的外衣，而且应用广泛，意大利数学家帕乔利和德国天文学家开普勒分别称其为“神圣比例”和“神圣分割”，对后世影响深远. 黄金分割有许多有趣的性质，人们对它的应用也很广泛，造就了它今天的名气.

黄金分割具有严格的比例性、完美的艺术性以及很好的和谐性，蕴藏着丰富的美学价值.

例 2　黄金分割比的计算

如图 1.1-6，在给定长的线段 AB 上取一点 C，假设 AC 为较长的一段，且满足 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$.

图 1.1-6

设线段 AB 的长度为 1，AC 的长度为 x，则

$$\frac{x}{1}=\frac{1-x}{x},$$

解得 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$（舍去），因此 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是一个无限不循环小数，应用时一般取 0.618.

不仅在绘画中有许多符合黄金分割的例子，在数学与自然界中也有许多符合黄金分割的例子.

例 3　黄金分割与斐波那契数列

黄金分割与斐波那契数列之间存在着紧密的联系. 在斐波那契数列 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，…中，我们可以发现一个规律：这个数列从第三项开始，每一项都等于前两项之和，即该数列存在这样一个递推关系：$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$（$n\geqslant 3$），而且从第三项起，任何一项与后一项的比越来越接近黄金分割比 0.618，因此斐波那契数列也叫做黄金分割数列.

例 4　黄金矩形与黄金螺线

黄金矩形是一类矩形，其短边长约为长边长的 0.618. 黄金矩形经常出现在艺术作品中，能够带给人以视觉上的美感. 在达·芬奇的画作中可以看到黄金矩形的运用，如蒙娜丽莎的脸型就接近于黄金矩形.

黄金螺线又称斐波那契螺线，是一种近似对数螺线的曲线，我们可以借助黄金矩形画出黄金螺线，其画法如下：

如图 1.1-7，首先在黄金矩形里以宽（短边）为边长作一个正方形，剩下的那部分则又是一个黄金矩形，接着依次再作正方形. 在这些正方形中画圆心角为 90°的扇形，连接起来的弧线就是一条黄金螺线.

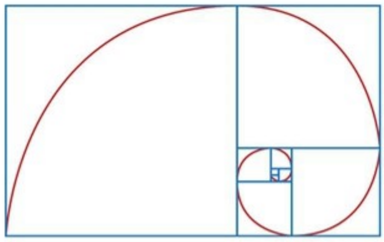


图 1.1-7

思考题

1. 请用数学语言严格推导斐波那契数列后一项与前一项的比值的极限为黄金分割比.
2. 查阅资料，收集运用黄金分割构图法创作的中国画作，并进行赏析.
3. 试讨论一下正五角星中的黄金分割.

Idea 2

十二平均律与等比数列

十二平均律是最为流行的生律方法，我国明朝律学家朱载堉（1536—1611）是世界上最早从数学角度完美提出十二平均律理论的律学家.

2.4.1　十二平均律及其数学原理

从数学角度看，十二平均律的生律方法是，通过计算精确规定八度音阶的频率比例，把八度音程分为十二等份，得到十二个半音，其中每相邻两个音的频率之比相等. 采用这样的方式生成的音律叫做**十二平均律**.

思考

前面我们学习了三分损益法、五度相生律和纯律这三种律制，知道它们有一个共同的数学计算依据，即音阶中不同音之间的频率（或弦长）之比是整数与整数之比，换句话说，这个比是不同的有理数. 那么，在十二平均律中相邻两个音的频率之比是一个什么样的数呢？这个数还是有理数吗？

设音 C 的频率是 b，于是音 C 的上方八度音 c 的频率就是 $2b$. 如果在音的序列中相差一个半音的两个音的频率之比是 a，那么根据十二平均律可以写出八度音程中的各个音. 将这些音的频率按由小到大的顺序排列，就得到一个公比为 a 的等比数列：b，ba，ba^2，ba^3，…，ba^{11}，ba^{12}.

因为该数列最后一项是音 C（频率为 b）的上方八度音 c 的频率，所以 $ba^{12}=2b$. 解得 $a=\sqrt[12]{2}\approx 1.059\,463$. 计算结果表明，十二平均律中相邻两个音的频率之比是个常数. 这个常数不是有理数，而是无理数$\sqrt[12]{2}$.

通过对 2.4.3 节及“阅读材料　明朝律学家朱载堉”的学习，你会进一步知道朱载堉在计算这个半音频率比上作出的贡献.

2.4.2　十二平均律的特点

通过分析可知，构建一个常数频率比是形成十二平均律的基础，那么人们为什么要采用这种生律方法呢？其特点是什么呢？

研究表明，人耳能听到的音的频率范围是 20～20 000 Hz. 理论上说在这个范围内，形成的音的个数是无限多的，而在音乐实践中人们所使用的音的数目却不是越多越好，

相反，用几个音就能创作出一首旋律优美的乐曲．就乐器来看，音程最大的钢琴也仅有88个键，这已经是表现力最强的乐器了．十二平均律采用频率比相等的方式生成的音阶具有乐音的均衡性和简约性，这种特性使乐音的表现力和人耳的可接受性之间达到了一种平衡，因而被人们广泛认可．这种乐音效果是建立在数学的精准计算和长期的音乐实践基础之上的．

十二平均律最突出的优点表现在乐曲的移调和转调方面（所谓转调，就是由某一调转到另一调或由某一调式变换成另一调式）．通过频率的计算推演可以看到，十二平均律打通了不同音调音阶升、降半音之间的通道，大大简化了它们之间的转换关系，在音乐创作实践中具体解决了“律位与琴音不相协调”的问题（后面会介绍，这一问题的成功解决最终依赖于朱载堉的音律算法），这为音乐创作和乐器演奏的拓展创造了极为有利的条件．正因为具有这样的特点，十二平均律已成为音乐界普遍采用的律制．


巴赫（Johann Sebastian Bach，1685—1750），巴洛克时期德国作曲家、演奏家，被尊称为“西方音乐之父”．

在古典音乐家如J. S. 巴赫的音乐作品中，音域和转调的复杂要求使得他在创作时使用十二平均律成为必要手段．他运用十二平均律创作了大、小调各两套十二平均律钢琴曲，共48首．这些乐曲长期以来已成为人们钢琴学习的经典教材．当然，也正因为十二平均律的这些特点，钢琴和几乎所有键盘乐器的音阶设计基本上采用的都是十二平均律．

2.4.3　我国明朝律学家朱载堉的贡献

据历史考证，我国在音乐实践中开始应用平均律约在公元前2世纪，但平均律理论的出现，则是明朝律学家朱载堉的贡献．他在《律吕精义》中提出了“新法密律”的计算方法，是世界上最早运用数学方法将平均律公式化的人．他还应用自制特大算盘具体计算了十二平均律的频率比（2的12次方根），其计算结果精确到25位有效数字，这在当时的条件下是难以想象的．这不仅是对音乐律学的贡献，也是我国古代算学的一项重要成果（可参阅朱载堉的著作《算学新说》）．朱载堉的成就是中华民族的骄傲．

例　朱载堉是世界上最早用数学方法计算出十二平均律中半音频率比的律学家．若按十二平均律形成的音阶中，C音的频率为 f，则G音的频率为（　　）．

(A) $\sqrt[3]{2}f$　　(B) $\sqrt[3]{2^2}f$　　(C) $\sqrt[12]{2^5}f$　　(D) $\sqrt[12]{2^7}f$

解：根据题意可知，在这个音阶中，各个单音的频率构成以C音频率 $a_1=f$ 为首项，$q=\sqrt[12]{2}$ 为公比的等比数列．根据音阶中各音的排列顺序，G音是第8个音．由等比数列的通项公式知

$$a_8=a_1q^7=f\times(\sqrt[12]{2})^7=\sqrt[12]{2^7}f.$$

故选 D.

思考题

设 C 音的频率为 1，求十二平均律中“D，E，♯F，♭G”的频率，你发现了什么？请对你的发现结果作出解释.

阅读材料

明朝律学家朱载堉

朱载堉，字伯勤，河南省怀庆府河内县（今河南沁阳）人，明代著名的律学家（有“律圣”之称）、历学家、音乐家.

朱载堉是明太祖九世孙，郑藩第六代世子. 1591年，郑王去世，作为长子的朱载堉本可继承王位，但他却辞爵归里，潜心攻读音律、历算，著有《乐律全书》《律吕正论》《律吕精义》《律历融通》《算学新说》《瑟谱》等. 中外学者尊崇他为“东方文艺复兴式的圣人”.

朱载堉创立了十二平均律的理论. 他在《律吕精义》中提出了“新法密律”的计算方法，并解决了五度相生律无法还原的问题. 1863 年，德国物理学家、生理学家亥姆霍兹在《音感——音乐理论的生理基础》中写道：“在中国人中，据说有一个王子叫载堉的，他在保守派音乐家的反对声浪中倡导七声音阶. 把八度分成 12 个半音以及变调的方法，也是这个有天才和技巧的国家发明的.”❶

朱载堉在具体计算十二平均律的比率时，采用了两个步骤：开平方和开立方，如求 2 开 12 次方，可以先求两次开平方，再求一次开立方，共开 12 次方. 这种方法在《朱载堉珠算开方术述评》（冯文慈著）中有详细介绍. 朱载堉自制了 81 档大算盘，编制了专门的算法和口诀（参阅“阅读材料　从几篇历史文献看我国古代对音律算法的贡献”），最终得到了可达 25 位有效数字的计算结果.

---

❶ Helmholtz H. On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music [M]. 3rd Edition. London: Longmans, Green and Co., 1895.